6 Determinanten

6.1 Symmetrische Gruppe

Definition: Eine bijektive Abbildung von einer Menge X auf sich selbst heisst eine *Permutation von X*.

Proposition-Definition: Die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ zusammen mit der Komposition von Abbildungen und der identischen Abbildung id als neutrales Element ist eine Gruppe, genannt die *symmetrische Gruppe vom Grad n*. Bezeichnung S_n

Bew.: $S_n \times S_n \to S_n$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$ wohldefiniert

assoziativ $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$

$\mathrm{id} \circ \sigma = \sigma$

$\forall \sigma \in S_n$: $\sigma^{-1} \in S_n$ und $\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}$

qed.

Elemente von S_n bezeichnet man üblicherweise mit kleinen griechischen Buchstaben und schreibt ihre Operation klammernlos in der Form $\sigma \colon i \mapsto \sigma i$.

Proposition: Es gilt $|S_n| = n!$.

Bew.: Wertetabelle

1	2	...	n
$\sigma 1$	$\sigma 2$		σn

Anzahl Möglichkeiten: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

qed.

Definition: Ein Paar (i, j) mit $1 \leqslant i < j \leqslant n$ und $\sigma i > \sigma j$ heisst ein *Fehlstand von σ*. Die Zahl

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma) \;:=\; (-1)^{\text{Anzahl Fehlstände von } \sigma}}$$

heisst das *Signum* oder die *Signatur* oder das *Vorzeichen von σ*. Eine Permutation mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ heisst *gerade*, eine mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ heisst *ungerade*.

Lemma: Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\sigma j - \sigma i) \;=\; \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j - i).}$$

Bew.:

$$\text{Linke Seite} = \prod_{1\le i<j\le n} \begin{Bmatrix} -1 & \text{falls Fehlstand} \\ +1 & \text{falls nicht} \end{Bmatrix} \cdot |\sigma j - \sigma i| = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{1\le i<j\le n} \underbrace{|\sigma j - \sigma i|}_{\text{hängt nur von } \{\sigma i, \sigma j\} \text{ ab}} \overset{!}{=} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{1\le i<j\le n} \underbrace{|j - i|}_{\text{nur von } \{i,j\}}$$

$= \text{Rechte Seite}$

qed.

Proposition: Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) &= 1 \\ \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau) \\ \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) &= \operatorname{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Abbildung $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. $\{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}$

Bem.: id hat 0 Fehlstände $\Rightarrow \operatorname{sgn}(id) = (-1)^0 = 1$.

$$\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) \overset{\text{Lemma für } \sigma\circ\tau}{=} \frac{\prod_{i<j}(\sigma\tau j - \sigma\tau i)}{\prod_{i<j}(j-i)} = \underbrace{\frac{\prod_{i<j}(\sigma\tau j - \sigma\tau i)}{\prod_{i<j}(\tau j - \tau i)}}_{\|} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i<j}(\tau j - \tau i)}{\prod_{i<j}(j-i)}}_{\| \text{ Lemma für } \tau \atop \operatorname{sgn}(\tau)}$$

$$\prod_{i<j} \underbrace{\frac{\sigma\tau j - \sigma\tau i}{\tau j - \tau i}}_{\text{hängt nur von } \{\tau i, \tau j\} \text{ ab.}} = \prod_{i<j} \frac{\sigma j - \sigma i}{j-i} = \frac{\prod_{i<j}(\sigma j - \sigma i)}{\prod_{i<j}(j-i)} \overset{\text{Lemma für } \sigma}{=} \operatorname{sgn}(\sigma)$$

Also $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$.

$\sigma^{-1}\circ\sigma = id$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\cdot\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\circ\sigma) = \operatorname{sgn}(id) = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)^{-1} = \operatorname{sgn}(\sigma)$ da $(-1)^{-1} = -1$.

qed.

τ

Beispiel: Eine Permutation, die zwei verschiedene Ziffern vertauscht und alle übrigen Ziffern festlässt, heisst *Transposition.* Jede Transposition hat Signum -1.

1	$\ldots$	$i-1$	i	$i+1 \ldots j-1$	j	$j+1 \ldots$
1		$i-1$	j	$\ldots$	i	$\ldots$

Bew.: Sei $\tau i = j$ und $\tau j = i$ mit $i < j$.

$\Rightarrow \{\text{Fehlstände von } \tau\} = \{(i,k) \mid i<k<j\} \cup \{(i,j)\} \cup \{(k,j) \mid i<k<j\}$.

$\#(\text{Fehlstände von } \tau) = (j-i-1) + 1 + (j-i-1) \equiv 1 \mod 2$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. qed.

Beispiel: Eine Permutation, die $k \geqslant 1$ verschiedene Ziffern zyklisch vertauscht und alle übrigen Ziffern festlässt, hat Signum $(-1)^{k-1}$.

Bew.: Induktion über k.

$k=1$: $\sigma = id \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1 = (-1)^{1-1}$.

$k>1$: Sei $l_1 \xmapsto{\sigma} l_2 \xmapsto{\sigma} l_3 \xmapsto{\sigma} \ldots \xmapsto{\sigma} l_k \xmapsto{\sigma} l_1$ die vertauschten Ziffern.

Setze $\tau: l_1 \mapsto l_k \mapsto l_1$, sonst die Identität. Transposition

$\rho: l_1 \mapsto l_2 \mapsto \ldots \mapsto l_{k-1} \mapsto l_1$, sonst die Identität.

$\Rightarrow \sigma = \tau \circ \rho$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\rho) \overset{\text{IV.}}{=} (-1) \cdot (-1)^{(k-1)-1} = (-1)^{k-1}$ qed.

Definition: Für jedes $\sigma \in S_n$ betrachte die $n \times n$-Matrix

$$\boxed{P_\sigma \;:=\; \big(\delta_{i,\sigma j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.}$$

Proposition: Die Matrix P_σ ist eine Permutationsmatrix. Umgekehrt ist jede $n \times n$-Permutationsmatrix gleich P_σ für genau ein $\sigma \in S_n$. Ausserdem gilt für alle $\sigma, \tau \in S_n$

$$(*) \quad \boxed{P_{\sigma\tau} \;=\; P_\sigma \cdot P_\tau.}$$

Das bedeutet, dass $\sigma \mapsto P_\sigma$ einen Gruppenisomorphismus von S_n auf die Gruppe aller $n \times n$-Permutationsmatrizen induziert.

Bew (*):

$$P_\sigma \cdot P_\tau = \big(\delta_{i,\sigma j}\big)_{i,j} \cdot \big(\delta_{j,\tau k}\big)_{j,k} = \Big(\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,\sigma j} \cdot \underbrace{\delta_{j,\tau k}}_{\substack{= \\ 1 \text{ für } j=\tau k \\ 0 \text{ sonst}}}\Big)_{i,k}$$

$$= \big(\delta_{i,\sigma\tau k}\big)_{i,k} = P_{\sigma\tau}$$

qed.